Olympiadeklassen

9–10

65. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweise: 1. *Für die Olympiadeklassen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

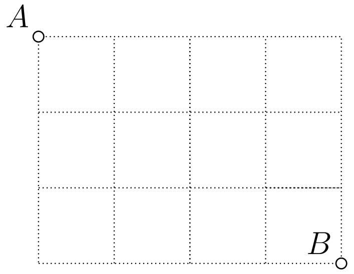
2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

651011

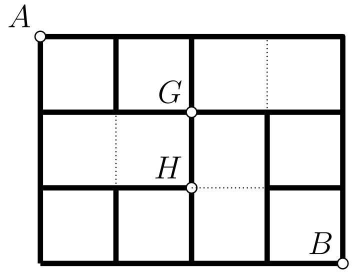
In allen Aufgabenteilen betrachten wir Wegepläne, deren Wege auf den Gitterlinien eines Quadratgitters (wie Abbildung A 651011 a) liegen und deren Zielpunkt rechts unterhalb des Startpunkts liegt. In den Grafiken sind die Gitterlinien als gepunktete und die Wege als fette Linien dargestellt (siehe Abbildung A 651011 b). Die Wegepläne sind rechteckig, d.h. ihr äußerer Rand ist ein Rechteck, bei dem Start- und Zielpunkt einander als Eckpunkte diagonal gegenüberliegen. Die Gitterquadratseiten seien Einheitsstrecken (haben also die Länge 1). Gefragt wird jeweils nach der Anzahl der kürzesten Wege vom Start- zum Zielpunkt auf dem Wegeplan. Die Antwort kann in a) und in b) ohne Begründung angegeben werden.

a) Wie viele kürzeste Wege von A nach G und wie viele kürzeste Wege von A nach H gibt es in Abbildung A 651011 b?

b) Wie viele kürzeste Wege von A nach B gibt es in Abbildung A 651011 b?



A 651011 a



A 651011 b

c) Entwerfen Sie einen rechteckigen Wegeplan mit einem Startpunkt A und einem weiter rechts und weiter unten liegenden Zielpunkt B, in welchem es genau 20 kürzeste Wege von A nach B gibt. Wege zählen dabei nur als kürzeste Wege, wenn sie nur von links nach rechts bzw. von oben nach unten durchlaufen werden. Hier ist nachzuweisen, dass es tatsächlich 20 Wege sind.
Hinweis: Das zugrunde gelegte Quadratgitter darf von der Größe 3×4 der Beispielabbildung (Abbildung A 651011 a) abweichen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

651012

In dieser Aufgabe sind a und b positive ganze Zahlen.

a) Geben Sie alle Lösungen (a, b) der Gleichung $a^2 + b^2 = 65$ an.
b) Geben Sie alle Lösungen (a, b) der Gleichung $a^2 + b^2 = 340$ an.
c) Hat die Gleichung $a^2 + b^2 = 8024$ Lösungen, bei denen a und b ebenfalls positive ganze Zahlen sind?

Hinweis: Die Gleichung $a^2+b^2 = 13$ hat im Bereich der positiven ganzen Zahlen die Lösungen $(2, 3)$ und $(3, 2)$, denn es gilt

$$2^2 + 3^2 = 3^2 + 2^2 = 13\,.$$

651013

In dieser Aufgabe werden drei lineare Gleichungssysteme mit zunächst in a) und b) jeweils vier und in c) mit sechs Unbekannten untersucht. Die Variablen sollen dabei durch reelle Zahlen ersetzt werden, sodass alle Gleichungen erfüllt sind.

a) Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems.

$$a + b + c = 1 \tag{1}$$
$$b + c + d = 2 \tag{2}$$
$$c + d + a = 3 \tag{3}$$
$$d + a + b = 4 \tag{4}$$

Hinweis: Erkennen Sie, wie man zuerst die Summe $a + b + c + d$ bestimmen kann?

b) Zeigen Sie, dass das folgende Gleichungssystem keine Lösung hat.

$$a + b = 0 \tag{1}$$
$$b + c = 0 \tag{2}$$
$$c + d = 0 \tag{3}$$
$$d + a = 1 \tag{4}$$

c) Geben Sie zwei verschiedene Lösungen des folgenden Gleichungssystems an.

$$a + b + c = 0 \tag{1}$$
$$b + c + d = 0 \tag{2}$$
$$c + d + e = 0 \tag{3}$$
$$d + e + f = 0 \tag{4}$$
$$e + f + a = 0 \tag{5}$$
$$f + a + b = 0 \tag{6}$$

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

651014

In dieser Aufgabe sollen Wahrscheinlichkeiten berechnet werden. Dabei werden zufällig zwei bzw. drei Zahlen ohne Zurücklegen (bzw. mit einem Griff) aus der Menge der aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen $\{2025, 2026, 2027, \cdots, 2039, 2040\}$ gezogen.

a) Es werden genau zwei Zahlen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die positive Differenz der beiden Zahlen durch 6 teilbar?

b) Es werden genau drei Zahlen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Summe der drei Zahlen mindestens 6116?

Hinweis: Zufälliges Ziehen soll bedeuten, dass alle Möglichkeiten des Ziehens von zwei bzw. drei Zahlen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eintreten.

651015

In einem rechtwinkligem Koordinatensystem sind die vier Punkte $A(-1, 0)$, $B(b, 3)$, $C(1, 6)$ und $D(-3, 2)$ gegeben. Dabei ist b eine reelle Zahl größer als -2.

Bestimmen Sie jeweils alle Werte von b, für die

a) die vier Punkte ein bei C rechtwinkliges Viereck $ABCD$ bilden,

b) die vier Punkte ein Trapez $ABCD$ bilden,

c) die vier Punkte ein Sehnenviereck $ABCD$ bilden,

d) die vier Punkte ein Viereck $ABCD$ mit dem Flächeninhalt 5 bilden.

651016

Gegeben sind fünf Punkte durch ihre Koordinaten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem: $A(0, 18)$, $B(0, 12)$, $C(8, 12)$, $D(0, 0)$ und $E(24, 0)$. Der Punkt S sei der Schnittpunkt der Geraden CD und BE. Der Punkt F sei der Schnittpunkt der Gerade AS mit der x-Achse.

a) Berechnen Sie die Flächeninhalte des Dreiecks DFS und des Dreiecks FES.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks CSE.