

# Qualifikationsphase eA

## 1 Kursfolge

1. Semester	Analysis I
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Kurvenanpassung und Funktionenscharen</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Von der Änderung zum Bestand - Integralrechnung</li> </ul>
2. Semester	Analytische Geometrie & Stochastik I
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Raumanschauung und Koordinatisierung</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Daten und Zufall (bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit, Erwartungswert und Standardabweichung diskreter Zufallsgrößen, Binomialverteilung I)</li> </ul>
3. Semester	Analysis II & Stochastik II
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Wachstumsmodelle - Exponentialfunktion</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Daten und Zufall (Binomialverteilung II, Normalverteilung)</li> </ul>
4. Semester	Ausgewählte Kapitel
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Themen nach Wahl – Abiturvorbereitung</li> </ul>



## 2 Prozessbezogene Kompetenzen in allen Lernbereichen

### 2.1 Mathematisch argumentieren:

Die Schülerinnen und Schüler...

- erläutern in inner- und außermathematischen Situationen Strukturen und Zusammenhänge und stellen darüber Vermutungen an.
- begründen oder widerlegen Aussagen in angemessener Fachsprache mit mathematischen Mitteln und reflektieren die Vorgehensweise.
- reflektieren und bewerten Argumentationen und Begründungen auf Schlüssigkeit und Angemessenheit.
- vertreten eigene Problemlösungen und Modellierungen.
- vergleichen und bewerten verschiedene Begründungen für einen mathematischen Sachverhalt.
- reflektieren Beweisverfahren
- variieren Situationen, stellen Vermutungen an und untersuchen diese.

### 2.2 Probleme mathematisch lösen:

Die Schülerinnen und Schüler...

- identifizieren in inner- und außermathematischen Situationen mathematische Probleme, formulieren diese mit eigenen Worten und in mathematischer Fachsprache.
- wählen geeignete heuristische Strategien zum Problemlösen aus und wenden diese an. überprüfen die Plausibilität der Ergebnisse.
- beschreiben, vergleichen und bewerten Lösungswege.
- reflektieren und bewerten die benutzten Strategien.
- variieren vorgegebene mathematische Probleme und untersuchen die Auswirkungen auf die Problemlösung.

### 2.3 Mathematisch modellieren

Die Schülerinnen und Schüler...

- vereinfachen durch Abstrahieren und Idealisieren Realsituationen, um sie einer mathematischen Beschreibung zugänglich zu machen und reflektieren die Vereinfachungsschritte.
- beschreiben Realsituationen durch mathematische Modelle wie z. B. durch Funktionen, Zufallsversuche, Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Koordinaten und Vektoren.
- führen Berechnungen im Modell durch.
- interpretieren Ergebnisse aus Modellrechnungen in der Realsituation und modifizieren ggf. das Modell.
- reflektieren die Grenzen von Modellen und der mathematischen Beschreibung von Realsituationen.
- ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Realsituationen zu und reflektieren so die Universalität von Modellen.



## 2.4 Mathematische Darstellungen verwenden

Die Schülerinnen und Schüler...

- begründen ihre Auswahl von Darstellungen und reflektieren allgemeine Vor- und Nachteile sowie die Grenzen unterschiedlicher Darstellungsweisen.

## 2.5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Die Schülerinnen und Schüler...

- verwenden mathematische Symbole zum Strukturieren von Informationen, zum Modellieren und zum Problemlösen.
- reflektieren deren Verwendung und übersetzen zwischen symbolischer und natürlicher Sprache.
- setzen digitale Mathematikwerkzeuge in allen Themenfeldern als sinnvolles Werkzeug zum Lösen mathematischer Probleme ein.
- belegen ihr Grundverständnis für mathematische Verfahren, indem sie diese auch ohne digitale Mathematikwerkzeuge in überschaubaren Situationen ausführen.
- nutzen eine handelsübliche Formelsammlung.
- kennen algorithmische Verfahren und können sie anhand von Beispielen erläutern.

## 2.6 Kommunizieren

Die Schülerinnen und Schüler...

- erfassen, interpretieren und reflektieren mathematikhaltige authentische Texte.
- erläutern eigene Problembearbeitungen und Einsichten sowie mathematische Zusammenhänge mit eigenen Worten und unter Verwendung geeigneter Fachsprache.
- dokumentieren Überlegungen, Lösungswege und Ergebnisse auch im Hinblick auf den Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge und stellen jene verständlich dar.
- präsentieren Überlegungen, Lösungswege und Ergebnisse unter Verwendung geeigneter Medien.
- verstehen Überlegungen anderer zu mathematischen Inhalten, überprüfen diese auf Schlüssigkeit und Vollständigkeit und gehen darauf ein.
- verwenden Fachtexte bei der selbstständigen Arbeit an mathematischen Problemen.



## 3 Lernbereiche

### 3.1 Lernbereiche: Kurvenanpassung und Funktionenscharen

#### Kern

##### Kurvenanpassung

- Funktionen nach globalen Eigenschaften wie Symmetrie, Verhalten für Form  $|x| \rightarrow \infty$  asymptotisches Verhalten bzw. Periodizität klassifizieren
- bei der Anpassung an Daten neben globalen Eigenschaften weitere charakteristische Merkmale von Funktionen zur Ermittlung eines geeigneten Funktionsterms nutzen
- vorgegebene lokale Eigenschaften des Graphen einer Funktion in Bedingungen an deren Funktionsterm übersetzen und diesen ermitteln
- Stetigkeit und Differenzierbarkeit zur Synthese und Analyse abschnittsweise definierter Funktionen nutzen

##### Funktionenscharen

- Gemeinsamkeiten und Unterschiede bei Scharen ganzrationaler Funktionen und bei Scharen, die durch Verknüpfungen und Verkettungen der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen entstehen, in Abhängigkeit vom Scharparameter benennen und begründen
- Variationen des Scharparameters zur Anpassung an vorgegebene Eigenschaften durchführen

#### Inhaltsbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler ...

- klassifizieren Funktionen nach bestimmten globalen Eigenschaften.
- nutzen bei der Anpassung an Daten neben globalen Eigenschaften weitere charakteristische Merkmale von Funktionen zur Ermittlung eines geeigneten Funktionsterms.
- bestimmen ausgehend von vorgegebenen Eigenschaften in Sachkontexten und von lokalen und globalen Eigenschaften des Graphen einer ganzrationalen Funktion deren Funktionsterm.
- übersetzen vorgegebene lokale Eigenschaften des Graphen in Bedingungen an den Funktionsterm und ermitteln diesen.
- nutzen Stetigkeit und Differenzierbarkeit zur Synthese und Analyse abschnittsweise definierter Funktionen.
- benennen und begründen Gemeinsamkeiten und Unterschiede bei Scharen ganzrationaler Funktionen und bei Scharen, die durch Verknüpfungen und Verkettungen der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen entstehen, in Abhängigkeit vom Scharparameter.



## 3.2 Lernbereich: Von der Änderung zum Bestand: Integralrechnung

### Kern

#### Bestimmtes Integral

- Bestände aus Änderungsraten und Anfangsbestand (re-)konstruieren
- das Integral als Grenzwert von Produktsummen beschreiben
- den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung geometrisch-anschaulich begründen  
bestimmte Integrale berechnen
- bestimmte Integrale auch im Sachzusammenhang deuten, insbesondere als (re-)konstruierter Bestand
- Inhalte von Flächen, die durch Funktionsgraphen begrenzt sind, bestimmen

#### Integral- und Stammfunktion

- Integralfunktionen auch als Bestands- oder Flächeninhaltsfunktion interpretieren
- Integral- und Stammfunktion unterscheiden
- Stammfunktionen zu Funktionen  $f$  mit  $f$  mit  $f(x) = x^n$ ;  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0\}$ ,  $f(x) = e^x$ ,  $f(x) = \sin(x)$  und  $f(x) = \cos(x)$  angeben
- die ln-Funktion als eine Stammfunktion der Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$  verwenden
- Stammfunktionen mit der Kettenregel bei linearer innerer Funktion, sowie mit Summen- und Faktorregel entwickeln
- Stammfunktionen mithilfe der Ableitungsregeln überprüfen

#### Vertiefungen

- Volumenformel für Körper, die durch Rotation eines Graphen um die x-Achse entstehen, herleiten und anwenden
- uneigentliche Integrale als Grenzwerte sowohl von Beständen als auch von Flächeninhalten interpretieren und bestimmen

#### Inhaltsbezogene Kompetenzen:

##### Die Schülerinnen und Schüler ...

- berechnen Bestände aus Änderungsraten und Anfangsbestand.
- nutzen Grenzwerte bei der Bestimmung von Ableitungen und Integralen.
- begründen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung geometrisch anschaulich.
- berechnen bestimmte Integrale, auch mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.
- deuten das bestimmte Integral als aus Änderungen rekonstruierter Bestand und als Flächeninhalt.
- bestimmen Inhalte von Flächen, die durch Funktionsgraphen begrenzt sind.
- interpretieren Integralfunktionen auch als Bestands- und Flächeninhaltsfunktion.
- unterscheiden Integral- und Stammfunktion.
- geben Stammfunktionen für die Funktionen  $f$  mit

$$f(x) = x^n, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0\},$$

$$f(x) = e^x,$$



**Inhaltsbezogene Kompetenzen:  
Die Schülerinnen und Schüler ...**

$f(x) = \sin(x)$  und  $f(x) = \cos(x)$  an.

- verwenden die In-Funktion als eine Stamm-funktion der Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{1}{x}; x > 0$ .
- wenden Produktregel und Kettenregel zur Berechnung von Ableitungsfunktionen an.
- entwickeln Stammfunktionen mit der Kettenregel bei linearer innerer Funktion sowie mit Summen- und Faktorregel.
- bestimmen Volumen von Körpern, die durch Rotation von Graphen um die x-Achse entstehen.
- nutzen Grenzwerte bei der Bestimmung von Ableitungen und Integralen.



### 3.3 Lernbereich: Raumschauung und Koordinatisierung

#### Kern

##### Raumschauung und Koordinatisierung

- Punkte und Vektoren in Ebene und Raum durch Tupel beschreiben
- die bildliche Darstellung und Koordinatisierung zur Beschreibung von Punkten, Strecken, ebenen Flächen und einfachen Körpern nutzen
- Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation von Vektoren anwenden und geometrisch veranschaulichen
- Kollinearität zweier Vektoren überprüfen
- die Projektion vom Raum in die Ebene mit Matrizen etwa der Form  $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$  beschreiben und Punktkoordinaten für Schrägbilder berechnen

##### Darstellungsformen

- Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform verwenden
- Ebenengleichungen in Normalen- und Koordinatenform verwenden
- zwischen den Darstellungsformen wechseln

##### Maße und Lagen

- Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen bestimmen
- Skalarprodukt geometrisch als Ergebnis einer Projektion deuten und verwenden Orthogonalität zweier Vektoren überprüfen
- Winkelgrößen bestimmen
- Lagebeziehungen von Geraden, Geraden und Ebenen sowie von Ebenen untersuchen und
- Schnittprobleme lösen
- den Gauß-Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme erläutern und in geeigneten Fällen anwenden

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen (über die in Kapitel 2 genannten hinausgehend)
<b>Die Schülerinnen und Schüler ...</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• lösen lineare Gleichungssysteme mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge.</li> <li>• erläutern den Gauß-Algorithmus als ein Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme und wenden ihn an.</li> <li>• bestimmen Streckenlängen in Ebene und Raum auch mithilfe des Skalarproduktes.</li> <li>• überprüfen die Orthogonalität zweier Vektoren.</li> <li>• bestimmen Winkelgrößen in Ebene und Raum auch mithilfe des Skalarprodukts.</li> <li>• erläutern und nutzen Verfahren zur Berechnung von Abständen von Punkten, Geraden und Ebenen.</li> <li>• nutzen die bildliche Darstellung und Koordinatisierung zur Beschreibung von Punkten, Strecken, ebenen Flächen und einfachen Körpern.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• verwenden geometrische und vektorielle Darstellungsformen für geometrische Gebilde und wechseln zwischen diesen.</li> <li>• arbeiten mit Funktionstermen, mit Gleichungen und Gleichungssystemen sowie mit Vektoren und Matrizen.</li> </ul>



Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen (über die in Kapitel 2 genannten hinausgehend)
<b>Die Schülerinnen und Schüler ...</b>	
<ul style="list-style-type: none"><li>• wenden die Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation von Vektoren an und veranschaulichen sie geometrisch.</li><li>• überprüfen zwei Vektoren auf Kollinearität.</li><li>• wenden Vektoren beim Arbeiten mit geradlinig bzw. ebenflächig begrenzten geometrischen Objekten an.</li><li>• beschreiben Geraden und Ebenen durch Gleichungen in Parameterform.</li><li>• untersuchen die Lagebeziehungen von Geraden und bestimmen Schnittpunkte.</li><li>• deuten das Skalarprodukt geometrisch als Ergebnis einer Projektion.</li><li>• beschreiben Ebenen durch Gleichungen in Normalen- und Koordinatenform.</li><li>• wechseln zwischen den verschiedenen Darstellungsformen von Ebenen.</li><li>• untersuchen die Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen sowie von Ebenen und lösen Schnittprobleme.</li><li>• beschreiben die Projektion vom Raum in die Ebene mit Matrizen etwa der Form <math>\begin{pmatrix} a &amp; 1 &amp; 0 \\ b &amp; 0 &amp; 1 \end{pmatrix}</math> und berechnen damit Punktkoordinaten für Schrägbilder.</li></ul>	



### 3.4 Lernbereich: Daten und Zufall

#### Kern

Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit

- Einträge in Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln nutzen, um den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit zu erarbeiten und dabei zwischen bedingendem und bedingtem Ereignis unterscheiden
- Zusammenhang zwischen Unabhängigkeit und bedingten Wahrscheinlichkeiten herstellen
- Kausale und stochastische Unabhängigkeit voneinander abgrenzen

Erwartungswert und Standardabweichung diskreter Zufallsgrößen

- Zusammenhang zwischen Kenngrößen der Häufigkeitsverteilung und Kenngrößen der Wahrscheinlichkeitsverteilung herstellen
- Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung berechnen und interpretieren
- faire Spiele mithilfe des Erwartungswerts kennzeichnen

Binomialverteilung

- Eignung des Modells beurteilen
- Beziehung zwischen Häufigkeitsverteilungen und Binomialverteilungen erläutern
- Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen verwenden
- Zufallsgröße sowie Parameter  $n$  und  $p$  der Binomialverteilung im Sachkontext angeben
- die Bedeutung der Faktoren im Term  $\binom{n}{p} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$  erläutern
- Wahrscheinlichkeiten für binomialverteilte Zufallsgrößen berechnen
- die Kenngrößen Erwartungswert und Standardabweichung berechnen
- die grafischen Darstellungen von Binomialverteilungen im Hinblick auf Parameter und Kenngrößen deuten
- Prognoseintervalle grafisch oder tabellarisch ermitteln und interpretieren
- beurteilen, ob ein vorgegebener Anteil der Grundgesamtheit bzw. ein vorgegebener Wert des Parameters  $p$  mit einer gegebenen Stichprobe verträglich ist
- die Binomialverteilung als näherungsweise Modell für weitere stochastische Situationen verwenden

Normalverteilung

- Diskrete und stetige Zufallsgrößen unterscheiden
- Notwendigkeit von Histogrammen erläutern
- Parameter der Normalverteilung erläutern und in Sachkontexten nutzen

Binomial- und Normalverteilung

- Angemessenheit der Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung beurteilen
- Prognoseintervalle auch mithilfe von  $\sigma$ -Umgebungen für Anteile berechnen und interpretieren



- Konfidenzintervalle für den Parameter  $p$  der Binomialverteilung ermitteln und interpretieren die Intervallgrenzen von Konfidenzintervallen als zufällige Größen erläutern
- die Sicherheitswahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit deuten, mit der die Konfidenzintervalle
- bei Verwendung der Normalverteilung den wahren Wert überdecken
- exemplarisch stochastische Situationen simulieren, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen, um Näherungslösungen in komplexeren Situationen zu erhalten

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen (über die in Kapitel 2 genannten hinausgehend)
<b>Die Schülerinnen und Schüler ...</b>	
<ul style="list-style-type: none"><li>• lösen Exponentialgleichungen.</li><li>• berechnen Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung für einfache diskrete Verteilungen.</li><li>• berechnen Erwartungswert und Standardabweichung für die Binomialverteilung. beurteilen, ob ein Spiel fair ist.</li><li>• beschreiben stochastische Situationen durch Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen.</li><li>• beschreiben Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen tabellarisch und grafisch.</li><li>• untersuchen Teilvorgänge in mehrstufigen Zufallsexperimenten auf stochastische Unabhängigkeit.</li><li>• erläutern die Beziehung zwischen Häufigkeitsverteilungen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen.</li><li>• stellen den Zusammenhang zwischen Kenngrößen der Häufigkeitsverteilung und Kenngrößen der Wahrscheinlichkeitsverteilung her.</li><li>• berechnen Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung.</li><li>• verwenden Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen.</li><li>• erläutern und verwenden die Binomialverteilung sowie Binomialkoeffizienten.</li><li>• charakterisieren Wahrscheinlichkeitsverteilungen anhand der Kenngrößen Erwartungswert und Standardabweichung und nutzen diese bei der Binomialverteilung für Interpretationen.</li><li>• ermitteln Prognoseintervalle für Stichproben im Kontext der Binomialverteilung.</li><li>• ermitteln, ob ein vermuteter Wert für den Parameter <math>p</math> der Binomialverteilung mit einer vorliegenden Stichprobe verträglich ist.</li><li>• unterscheiden zwischen kausaler und stochastischer Unabhängigkeit.</li><li>• begründen die Binomialverteilung als Näherungslösung für weitere stochastische Situationen.</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• stellen Zufallsexperimente auf verschiedene Weise dar und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten.</li></ul>



Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen (über die in Kapitel 2 genannten hinausgehend)
<b>Die Schülerinnen und Schüler ...</b>	
<ul style="list-style-type: none"><li>• unterscheiden zwischen diskreten und stetigen Zufallsgrößen sowie zwischen Säulendiagrammen und Histogrammen.</li><li>• nutzen den Erwartungswert und die Standardabweichung einer normalverteilten Zufallsgröße für Interpretationen.</li><li>• beurteilen die Approximierbarkeit der Binomialverteilung durch die Normalverteilung.</li><li>• berechnen Prognoseintervalle für eine binomialverteilte Zufallsgröße mithilfe der Approximation durch die Normalverteilung.</li><li>• berechnen Konfidenzintervalle für den Parameter <math>p</math> und zu einer vorgegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit einer binomialverteilten Zufallsgröße mithilfe der Approximation durch die Normalverteilung.</li><li>• verwenden Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen, die sich annähernd durch die Normalverteilung beschreiben lassen.</li></ul>	



### 3.5 Lernbereich: Wachstumsmodelle und Exponentialfunktion

#### Kern

Untersuchung von Wachstumsprozessen

- begrenztes und logistisches Wachstum beschreiben, auch als Verkettung und Verknüpfung von Funktionen
- verschiedene Wachstumsmodelle vergleichen
- asymptotisches Verhalten im Sachzusammenhang beschreiben
- Modelle mithilfe zugehöriger Differentialgleichungen beschreiben und mögliche Lösungsfunktionen überprüfen

e-Funktion

- die Basis e durch  $(e^x)' = e^x$  charakterisieren
- die Ableitungsfunktion der Funktion f mit  $f(x) = e^x$  und der Exponentialfunktionen g mit  $g(x) = a^x$  verwenden
- Verkettung und Verknüpfung mit ganzrationalen Funktionen auch zur Modellierung in Sachsituationen beschreiben und untersuchen
- asymptotisches Verhalten bei additiver Verknüpfung linearer Funktionen mit e-Funktionen beschreiben
- Exponentialgleichungen lösen Produkt- und Kettenregel anwenden
- Scharparameter, auch zur Angleichung an Daten, ermitteln
- Lösungsfunktionen von Differentialgleichungen durch Einsetzen überprüfen

#### Inhaltsbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler...

- beschreiben begrenztes und logistisches Wachstum, auch als Verkettung und Verknüpfung von Funktionen.
- vergleichen die bereits bekannten Wachstumsmodelle und das des logistischen Wachstums untereinander.
- beschreiben das asymptotische Verhalten bei additiver Verknüpfung der e-Funktion mit linearen Funktionen.
- überprüfen die Lösungsfunktionen von Differentialgleichungen für Wachstumsmodelle durch Einsetzen in die Differentialgleichung.
- charakterisieren die Basis e durch  $(e^x)' = e^x$ .
- verwenden die Ableitungsfunktion der Funktion f mit  $f(x) = e^x$  und der Exponentialfunktionen g mit  $g(x) = a^x$ .
- führen für ganzrationale Funktionen die Variation eines Parameters zur Anpassung an eine vorgegebene Eigenschaft durch.
- beschreiben und untersuchen Verkettungen und Verknüpfungen der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen auch zur Modellierung in Sachsituationen.
- lösen Exponentialgleichungen.
- wenden Produktregel und Kettenregel zur Berechnung von Ableitungsfunktionen an.
- beschreiben Verkettungen der e-Funktion mit linearen Funktionen, untersuchen diese, wenden sie in Sachsituationen an und führen Parameterbestimmungen zur Angleichung an Daten durch.
- überprüfen die Lösungsfunktionen von Differentialgleichungen für Wachstumsmodelle durch Einsetzen in die Differentialgleichung.